

Convocatoria 2024 de proyectos de investigación del Colegio de Ciencia y Tecnología de la UACM

Rita Vázquez Padilla
26 de febrero de 2024

1. Título del proyecto

“Análisis del uso de operaciones y vectores no usuales en la construcción del concepto de espacio vectorial”

2. Modalidad de participación

Proyecto inicial

3. Otros financiamientos

El proyecto no cuenta con otros financiamientos

4. Datos del Responsable Técnico

Dra. Rita Vázquez Padilla. Academia de Matemáticas. Plantel San Lorenzo Tezonco.

5. Datos de colaboradores adscritos a la UACM

6. Datos de los alumnos participantes

Guadalupe Martínez Ortega (16-003-0528). Licenciatura en Modelación Matemática. Plantel San Lorenzo Tezonco

7. Nombre completo, institución de adscripción de colaboradores externos.

Dr. Osiel Ramírez Sandoval. Departamento de Física y Matemáticas, Universidad Autónoma de Ciudad Juárez

8. Resumen de la propuesta

Se presenta una propuesta para investigar la incidencia del uso de vectores y operaciones binarias no usuales en las construcciones asociadas al concepto de Espacio Vectorial (EV) tomando como base las investigaciones en el marco de la teoría constructivista APOE (Acción-Proceso-Objeto-Esquema) en las que se propone una descomposición genética (DG) de EV. Analizaremos las DG de EV existentes con énfasis en las construcciones y mecanismos que relacionan a los elementos del conjunto, el campo de escalares y las operaciones binarias, para proponer una DG inicial del concepto espacio vectorial. Se diseñarán tareas en las que se opere con vectores no usuales (funciones) para reconocer construcciones Acción, Proceso y Objeto de vector y compararlas con las descritas en la DG. Las actividades se implementarán con estudiantes de cursos de Álgebra Lineal en la UACM, usando la metodología del ciclo ACE y se recogerán evidencias *in situ* en forma de video, producciones escritas y entrevistas semi-estructuradas. Se llevará a cabo un análisis de los resultados de la implementación, cruzando y tomando consenso de las observaciones del grupo de investigadores. Los resultados del análisis permitirán hacer un refinamiento de la DG inicial y diseñar una secuencia didáctica basada en la DG, en el contexto de la formación de ingenieros y estudiantes de modelación matemática. Los resultados de la investigación se reportarán en un artículo de investigación para la revista Educación Matemática o de ranking similar, del que nos comprometemos a hacer el envío. Del mismo modo, serán presentados en un congreso en el área de Matemática Educativa a nivel nacional o internacional, dependiendo de las fechas de los mismos.

9. Antecedentes, justificación e hipótesis de la propuesta

Esta propuesta forma parte de dos líneas de investigación en el área de Enseñanza del Álgebra Lineal y de la Modelización como herramienta didáctica en la formación de futuros ingenieros, en la que hemos trabajado desde 2017 en colaboración con investigadores del CINVESTAV (Oktaç, Vázquez, Sandoval y Villabona, 2021) y del CICATA-IPN (Vázquez, Trigueros y Romo-Vazquez, 2020), respectivamente. En nuestro grupo hemos analizado la construcción cognitiva de diversos conceptos en el Álgebra Lineal, bajo el enfoque y metodología propuesta por la Teoría APOE (Acción-Proceso-Objeto-Esquema). Entre estos conceptos, se encuentra el de Espacio Vectorial (EV), el cual es de suma importancia tanto en la teoría matemática (como estructura algebraica) como en las aplicaciones dentro de disciplinas específicas. Diversos obstáculos que subyacen a la enseñanza y aprendizaje del Álgebra Lineal han sido identificados, mismos que le son inherentes por su naturaleza abstracta y la carga cognitiva que exige su comprensión (Oktaç y Trigueros, 2010; Thomas & Stewart, 2011; Dorier, 2000). Dentro de las investigaciones en el marco de la Teoría APOE, Parraguez & Oktaç (2010) propusieron una Descomposición Genética (DG) para EV (un modelo hipotético de la construcción del concepto basado en construcciones y mecanismos mentales definidos en la Teoría APOE) en la que se declara la necesidad de contar con una construcción de tipo Objeto de conjunto V sobre el que pueden aplicarse las dos operaciones (suma y producto por escalar). Asimismo, se reporta evidencia de que el mecanismo de coordinación entre las operaciones de suma y producto por escalar no es trivial desde un punto de vista cognitivo. En un proyecto previo identificamos que los estudiantes no alcanzan

a desarrollar un pensamiento suficientemente flexible respecto a la construcción del Objeto vector, que les permita asimilarlo al Esquema de EV, y observamos también una preponderancia de la noción de vector como flecha (par ordenado). Nuestra hipótesis es que al variar los tipos de vectores y sus operaciones se puede propiciar una construcción más íntegra del Objeto vector y otras relaciones entre los elementos de EV pueden evidenciarse, por ejemplo, la relación entre las operaciones y el concepto de neutro aditivo, así como las diferencias entre operar con los escalares o con los vectores, dentro de los axiomas de espacio vectorial. Lo anterior nos lleva a plantear la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué elementos aporta a la descomposición genética de Espacio Vectorial el uso de vectores y operaciones no usuales?

10. Objetivos generales y específicos

El objetivo general es estudiar la incidencia del uso de vectores y operaciones binarias no usuales en las construcciones asociadas al concepto de Espacio Vectorial (EV).

Los objetivos específicos son:

- Proponer una DG preliminar del concepto de espacio vectorial
- Diseñar tareas enmarcadas en la Teoría APOE, para promover la construcción Objeto de espacio vectorial
- Implementar las tareas, recoger las evidencias de los estudiantes *in situ*.
- Analizar las producciones de los estudiantes a través de entrevistas semiestructuradas, individuales y colectivas, evidencias de producciones escritas, en audio y en video.
- Análisis y consenso de los resultados
- Obtener un refinamiento de la DG preliminar y realizar propuestas didácticas para contribuir a la mejora del aprendizaje de Espacios Vectoriales en los cursos de Álgebra Lineal.
- Reportar los resultados de la investigación en un artículo preparado para ser enviado a una revista arbitrada.
- Divulgar los avances de resultados en un foro de investigación nacional o internacional del área especializada.

11. Impacto del proyecto

Esta investigación será una contribución a los resultados que se han desarrollado en la comunidad de la Didáctica del Álgebra Lineal, en el marco de la Teoría APOE, y que han sido presentados en diversos foros nacionales e internacionales (INDRUM, CHINA); por ello, el proyecto resultará en una mayor visibilización de la investigación educativa de la UACM.

Por otro lado, se tienen escasos antecedentes en nuestra institución sobre investigaciones que atiendan las problemáticas sobre la enseñanza y el aprendizaje en materias específicas. Con esta línea de investigación buscamos proponer mejoras en la enseñanza a partir de desarrollar investigación educativa que atienda las particularidades de nuestra población estudiantil, de acuerdo con el principio de aprendizaje centrado en el estudiante “[...] desde la

perspectiva de una educación crítica, científica, humanística y con sentido social” (UACM, 2018). Nuestra investigación tiene un impacto directo no solo al poner en relieve las dificultades que poseen algunos estudiantes del CCyT al experimentar obstáculos cognitivos en los cursos en los que tradicionalmente se privilegia el manejo algorítmico sobre la construcción de los conceptos matemáticos sino también para proponer estrategias e instrumentos didácticos que contribuyan a mejorar el aprendizaje del Álgebra Lineal. La colaboración de la estudiante, aportará un enfoque educativo a su formación profesional. Podrán experimentar en el diseño y la implementación de actividades; participarán en la implementación y colaborarán con el registro de producciones de los estudiantes y entrevistas. Hacemos notar que debido a que en la UACM no existen aún opciones de titulación de la carrera de Modelación Matemática con un enfoque en enseñanza, no es posible por el momento proponer como entregable el registro de una tesis de estudiante de la UACM. Con la integración de la estudiante estamos atendiendo a una necesidad ya identificada entre nuestros egresados en relación a la formación didáctica basada en investigación científica, dado que varios de ellos al salir de la carrera, se dedican también a la docencia.

12. Metodología de investigación

Para desarrollar la investigación se seguirá la metodología propuesta por la Teoría APOE. Partiremos de un Análisis Teórico del concepto de espacio vectorial (EV) con el propósito de construir una descomposición genética (DG) preliminar. La descomposición genética es una descripción de los mecanismos y construcciones mentales que un individuo puede hacer para construir su comprensión de un concepto matemático (Dubinsky, 1997). En nuestro análisis haremos énfasis en las construcciones y mecanismos que relacionan a los elementos del conjunto, el campo de escalares y las operaciones binarias, para proponer una DG inicial del concepto EV.

Las actividades y las tareas propuestos en la segunda fase son diseñados para fomentar en los estudiantes la construcción de Acciones, interiorizarlas en Procesos, encapsular Procesos en Objetos, y coordinar dos o más Procesos para construir nuevos Procesos. Se diseñarán tareas en las que se opere con vectores no usuales (funciones) y operaciones no usuales, para reconocer construcciones Acción, Proceso y Objeto de vector y compararlas con las descritas en la DG.

Las actividades se implementarán con estudiantes de un curso de Álgebra Lineal en la UACM durante el semestre 2024-2, usando la metodología del ciclo ACE y se recogerán evidencias *in situ* en forma de video, producciones escritas y entrevistas semi-estructuradas. En el análisis se debe cuestionar si los estudiantes hicieron las construcciones mentales que exige el análisis teórico y simultáneamente analizar cómo se aborda la enseñanza del concepto de Espacio Vectorial.

Se llevará a cabo un análisis de los resultados de la implementación, cruzando y tomando consenso de las observaciones del grupo de investigadores. Si en el análisis se obtienen resultados no favorables, se emprenderá un refinamiento del modelo hipotético; el ciclo puede repetirse hasta que la evidencia empírica y el análisis teórico apunten hacia las mismas construcciones mentales (Arnon et al., 2014). Como parte final de la investigación se

proponen sugerencias pedagógicas para la implementación y direcciones para investigación futura (Dubinsky, 1997), que tomarán forma en una secuencia didáctica enfocada a mejorar el aprendizaje del concepto EV.

13. Cronograma mensual de actividades

Actividad	MESES											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Revisión de literatura y análisis teórico de EV	X	X										
Propuesta de DG		X										
Diseño de actividades			X	X								
Implementación de actividades			X	X								
Recolección de datos			X	X								
Análisis de las producciones (entrevistas, registro)					X	X	X					
Escritura del artículo						X	X	X	X			
Envío del artículo										X	X	X
Elaboración de material didáctico									X	X	X	X
Presentación de trabajo en congreso (depende de la fecha del evento)									X	X	X	X

14. Desglose financiero

Recursos materiales	Justificación	Precio aproximado (MXN)
Mac mini CPU de 8 núcleos. GPU de 10 núcleos. 8 GB de memoria unificada. Almacenamiento SSD de 256 GB ¹ . Neural Engine de 16 núcleos. Dos puertos Thunderbolt 4. Dos puertos USB-A, puerto HDMI, Gigabit Ethernet, entrada para audífonos.	El equipo de cómputo se requiere para almacenar los registros escritos, en audio y en video de la implementación, las sesiones de trabajo y los diseños didácticos. Se requiere portabilidad del equipo para hacer los registros desde distintos espacios físicos (aula de clases, participación en eventos, lugares de trabajo de los investigadores participantes en dos instituciones).	13,500
Proyector Epson Powerlite E20 3400 lúmenes	El proyector se usará para el trabajo de investigación y la implementación de las actividades en aula	13,500
Viáticos para hospedaje y/o alimentos para asistir a evento académico.	Cubrirá una parte de los gastos para asistir al congreso 2024 de la Sociedad Matemática Mexicana o la conferencia CERME, según fechas.	8,000
Total		35,000

Resultados y entregables

Los resultados esperados contemplan una descomposición genética de EV con énfasis en las operaciones y el concepto de vector, sugerencias didácticas para su enseñanza y una secuencia didáctica basada en el ciclo ACE a partir de los resultados de la implementación.

Al término del periodo de la convocatoria, nos comprometemos con los siguientes entregables:

- Envío de un artículo en revista arbitrada.
- Participación en evento académico nacional (probablemente LVII Congreso de la SMM) o internacional (probablemente CERME 14, 2025, dependiendo de conseguir más viáticos)
- Diseño de dos secuencias didácticas producto de la investigación. Las secuencias corresponden a partes de la investigación con objetivos distintos.

- Publicación o aceptación para su publicación de artículo no consolidado.
- Titulación de estudiante de otra institución científica o de educación superior.
- Presentación de divulgación científica o tecnológica

Referencias bibliográficas

Aparecen señaladas en color los artículos en los que alguno de los participantes ha sido autor o coautor

- (1) Arnon, L., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). APOS Theory a framework for research and curriculum education. New York: Springer Netherlands. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6>
- (2) Dorier, J. (2000). Epistemological analysis of the genesis of the theory of vector spaces. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra*, (pp. 1–81). Grenoble, Francia: KluwerAcademics Publishers.
- (3) Dubinsky, E. (1997). Some thoughts on a first course in linear algebra at the college level. *MAA Notes*, 85-106.
- (4) Oktac, A. ,Vazquez, R., Sandoval,O., y Villabona, D. (2021). Transitional points in constructing the preimage concept in linear algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. 53. 1-20.
- (5) Oktaç, A. y Trigueros, M. (2010). ¿Cómo se aprenden los conceptos de álgebra lineal? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13 (4), 373-38
- (6) Parraguez, M., & Oktaç, A. (2010). Construction of the vector space concept from the viewpoint of APOS theory. *Linear algebra and its applications*, 432(8), 2112-2124.
- (7) UACM (2018). El Proyecto educativo de la UACM. Recuperado en: www.uacm.edu.mx
- (8) Thomas, M. & Stewart, S. (2011). Eigenvalues and eigenvectors: embodied, symbolic, and formal thinking. *Mathematics Education Research Group of Australasia*. 23, 275 - 296. <https://doi.org/10.1007/s13394-011-0016-1>

(9) Vázquez, R., Trigueros, M. Y Romo-Vázquez, A. (2020). Diseño de una actividad didáctica con base en un diálogo entre TAD y APOE. *Educação Matemática Pesquisa*, 22(4), pp. 189-203



Formato de entregables comprometidos:

Solo se aceptan entregables que aparecen en la siguiente lista. Cada fila de la lista corresponde a un tipo de entregable que se acepta en esta convocatoria. En las celdas de la columna “Número de entregables de un mismo tipo” se debe agregar el número preciso de aquellos entregables a los que se compromete el proyecto. Por ejemplo, si se cuenta con la publicación de dos artículos consolidados, se agrega a la correspondiente celda el número 2. Solo deben escribirse números, no debe existir ambigüedades, no utilizar y / o. Para los entregables que no hay compromiso en el proyecto, las celdas se dejan vacías.

Este formato se debe enviar junto al protocolo del proyecto. La no adecuada presentación del mismo puede ser motivo para invalidar la propuesta.

Se incluye la puntuación que corresponde a cada tipo de entregable en la evaluación del proyecto.

Tipo de entregable comprometido	Número de entregables de un mismo tipo	Puntuación según el tipo de entregable comprometido, ver tabla de puntuaciones
Titulación de estudiante de la UACM.		5
Publicación o aceptación para su publicación de artículo consolidado.		5
Publicación o aceptación para su publicación de libro o capítulo de libro resultado del proyecto de investigación.		5
Registro de Propiedad industrial o intelectual a nombre de la UACM		5
Transferencias tecnológicas.		5
Desarrollo de software consolidado.		5
Publicación o aceptación para su publicación de artículo no consolidado.	1	2
Presentación de avance e inscripción de tesis de licenciatura o posgrado de estudiante de la UACM		1
Envío para su publicación de artículo consolidado.	1	2
Envío para su publicación de artículo no consolidado.		1
Envío para su publicación de libro o capítulo de libro.		2
Titulación de estudiante de otra institución científica o de educación superior.	1	1
Desarrollo de software no consolidado.		1
Registro de Propiedad industrial o intelectual a nombre de otra institución.		1

Presentación de trabajo en evento científico o tecnológico.	1	1
Presentación de divulgación científica o tecnológica.	1	1
Presentación de prototipos funcionales.		1
Material educativo.	2	1

Descripción de los tipos de entregables:

Tipo de entregable	Descripción
Titulación de estudiante	Titulación de un estudiante de nivel de licenciatura o posgrado de institución científica o de educación superior, del país o del exterior. Se deberá presentar comprobante de la titulación del estudiante, y copia de los documentos que sirvieron para la titulación, por ejemplo la tesis presentada. Se deberá demostrar la participación del estudiante en el proyecto, así como el reconocimiento al proyecto aprobado, por ejemplo que quede plasmado en la tesis defendida. En el caso de titulación de más de un estudiante con el mismo trabajo, se considera como un solo entregable.
Artículo consolidado	Trabajo impreso en una publicación indexada periódica de carácter académico o de difusión de trabajos científicos, y el trabajo debe haber sido sometido a revisión por pares. Estas publicaciones periódicas están normalmente respaldadas por una casa editorial reconocida como tal. La referencia bibliográfica a un artículo consta al menos del nombre del artículo, el nombre de la revista, el año de publicación, el volumen (o número), y las páginas dentro de ese volumen. Las revistas electrónicas seriadas son consideradas en el mismo nivel que las revistas impresas y bajo los mismos criterios de calidad: perfil general de los artículos publicados en la revista, perfil general de los autores de dichos artículos, perfil del Consejo o Comité Editorial, cobertura, distribución e impacto. En el caso de artículos de difusión sólo se considerarán artículos en publicaciones seriadas. En ningún caso se considerarán artículos ni reportajes periodísticos. Cuando el artículo ha sido publicado, se debe adjuntar copia del artículo. Cuando un artículo se presenta como aceptado se debe adjuntar la carta de aceptación, así como copia del artículo aceptado. Cuando un artículo se presenta como enviado se debe adjuntar comprobante de la recepción del artículo por parte de quien lo evaluará y posiblemente publicará, así como copia del artículo.
Artículo no consolidado	Aquellos artículos resultados del trabajo de investigación que no cumplen con todos los requisitos de los artículos consolidados, incluyendo artículos de investigación, difusión, docencia o divulgación. Cuando el artículo ha sido publicado, se debe adjuntar copia del artículo. Cuando un artículo se presenta como aceptado se debe adjuntar la carta de aceptación, así como copia del artículo aceptado. Cuando un artículo se presenta como enviado se debe adjuntar comprobante de la recepción del artículo por parte de quien lo evaluará y posiblemente publicará, así como copia del artículo.
Libro	Trabajo impreso bajo el sello de una editorial reconocida o por la UACM. La reimpresión de un libro no es considerada como un nuevo entregable, a menos que la nueva edición haya sido sustancialmente aumentada y revisada, y esté relacionada con el proyecto de investigación aprobado en esta convocatoria. Los libros digitales (e-book) también se tomarán en cuenta, siempre y cuando hayan sido publicados por editoriales de reconocido prestigio o por la UACM. Cuando el libro ha sido publicado, se debe adjuntar copia del libro. Cuando un libro se presenta como aceptado se debe adjuntar la carta de aceptación, así como copia del libro aceptado. Cuando un libro se presenta como enviado se debe adjuntar comprobante de la recepción del libro por parte de quien lo evaluará y posiblemente publicará, así como copia del libro.
Capítulo de libro	Es un texto científico publicado como parte de un libro que cumpla con las características mencionadas en el entregable "libro". En este caso, las introducciones y los prólogos no serán considerados como capítulos de libros. Cuando el capítulo de libro ha sido publicado, se debe adjuntar copia del capítulo de libro. Cuando un capítulo de libro se presenta como aceptado se debe adjuntar la carta de aceptación, así como copia del capítulo de libro aceptado. Cuando un capítulo de libro se presenta como enviado se debe adjuntar comprobante de la recepción del capítulo de libro por parte de quien lo evaluará y posiblemente publicará, así como copia del capítulo de libro.
Presentación de trabajo en evento científico o tecnológico	Presentación de resultados de la investigación en eventos científico - tecnológicos.

Presentación de divulgación científica o tecnológica	Cualquier producto de divulgación científica o tecnológica, exceptuando artículos, libros o capítulos de libro. Se entiende por divulgación de la ciencia y la tecnología, una labor multidisciplinaria cuyo objetivo es comunicar conocimiento científico y tecnológico utilizando para ello una diversidad de medios. Dicha comunicación va dirigida a un público más amplio que el de los especialistas del tema, recreando el conocimiento con fidelidad y contextualizándolo para hacerlo accesible.
Registro de Propiedad industrial o intelectual.	El registro de la propiedad intelectual o industrial incluye a las patentes, esquemas de trazado de circuitos integrados y marcas, el registro de derechos de autor (en el caso de software), y/o registro de variedades de semillas y plantas. Las patentes pueden ser de innovación, modelo de utilidad, y diseño industrial. El proceso de registro de patente incluye los siguientes pasos: 1) la presentación de una solicitud, 2) la publicación oficial de la solicitud (1-2 años después), y 3) la concesión de la patente y publicación de la misma con lo que concluye el registro. La evidencia de cualquiera de estos pasos será considerado como entregable válido. Asimismo, se considerarán tanto patentes registradas ante el IMPI de México como patentes registradas en el extranjero. Este tipo de registro puede estar a nombre de la UACM u otra institución, pero en cualquier caso debe contar entre sus autores con al menos uno adscrito a la UACM.
Transferencias tecnológicas.	Se trata de un paquete tecnológico entregado a un usuario distinto al equipo del RT, incluida la institución de adscripción de este. Como evidencia de la transferencia se puede adjuntar al informe final: contratos con terceros, registro de derechos de autor o de variedades vegetales, idealmente cartas de usuario donde se demuestre el nivel de impacto en términos de beneficio económico, mejora de productividad o beneficios sociales. Debe ser realizada como parte del proyecto y por la UACM.
Desarrollo de software consolidado.	El desarrollo de software consolidado, para ser considerado como un entregable válido, debe constar con todas las siguientes características: 1. Generación y aplicación de conocimiento teórico-práctico original relacionado con el proyecto aprobado. 2. Documentación suficientemente detallada que permita la aplicación de este conocimiento por terceros, en forma de reportes técnicos o de investigación y/o manuales de usuario. 3. Evidencia de un esfuerzo de transferencia tecnológica y/o registro de derechos de autor. Para el caso de software libre distribuido por Internet, debe incluir la evidencia de un registro en línea de usuarios
Desarrollo de software no consolidado	El desarrollo de software no consolidado, debe constar con al menos una de las características del desarrollo de software consolidado
Presentación de prototipos funcionales.	
Material educativo.	Material educativo desarrollado como parte del trabajo de investigación del proyecto. Por ejemplo, una secuencia didáctica y su justificación (marco teórico, metodología).